ФИО студента ________________________________

Контрольная работа 16.11.2015.

Вариант 1.

1. На множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел определим отношение $\simeq$ следующим образом: $x \simeq y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Q}$. Доказать, что $\simeq$ задаёт эквивалентность на $\mathbb{R}$.

2. Пусть $f : a \times a \to a$ и для всех $x, y, z \in a$ выполняется

$$\begin{array}{l} f(x,x) = x, \\ f(x,y) = f(y,x), \\ f(x, f(y,z)) = f(f(x,y), z). \end{array}$$

Определим отношение $\leq$ следующим образом: $x \leq y \Leftrightarrow f(x,y) = x$. Доказать, что $\leq$ задает частичный порядок на a.

3. Доказать, что линейно упорядоченное множество $\mathbb{Z}$ неизоморфно линейно упорядоченному множеству $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.

4. Будут ли изоморфны линейно упорядоченные множества $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? (Порядок лексикографический: $(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow (a < c) \vee (a = c \& b < d)$).

Вариант 2.

ФИО студента ____

Контрольная работа 16.11.2015.

1. Пусть a — множество всех прямых на плоскости. Являются ли эквивалентностями следующие отношения: а) параллельность прямых, б) перпендикулярность прямых?

2. Пусть отношение $r \subseteq a \times a$ рефлексивно, а также известно, что

$$(x, z) \in r \& (y, z) \in r \Rightarrow (x, y) \in r$$

Доказать, что r задаёт эквивалентность на a.

3. Доказать, что линейно упорядоченное множество $\mathbb{R}$ неизоморфно линейно упорядоченному множеству $\mathbb{R} + \mathbb{R}$. (Подсказка: сначала допустим, что такой изоморфизм существует. Прообразы двух копий $\mathbb{R}$ разделяют множество $\mathbb{R}$ на две части. Построим неограниченно растущую последовательность в первой копии $\mathbb{R}$. Её прообразы будут ограничены, а значит, будут иметь единственный предел в $\mathbb{R}$...)

4. Будут ли изоморфны линейно упорядоченные множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? (Порядок лексикографический: $(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow (a < c) \vee (a = c \& b < d)$).