МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Факультет инноваций и высоких технологий

Кафедра концептуального анализа и проектирования

Методические указания по курсу
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА-2

МОСКВА 2007

УДК 510.22
П56

Рецензент
доктор физико-математических наук Ю. Н. Павловский

П56 Методические указания по курсу Математическая логика-2 /
Сост.: И. Н. Пономарев. — М.: МФТИ, 2007. — 26 с.

Настоящее методическое пособие содержит описание курса «Математическая логика-2», читаемого на факультете Инноваций и высоких технологий Московского физико-технического института (ГУ). В курсе изучаются аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля и её основные результаты, а также вводится аппарат родов структур и рассматриваются примеры его применения для описания математических объектов. В пособие включены программа курса, краткое содержание тем, вопросы для самоконтроля и домашней работы. Пособие может быть использовано как студентами II курса ФИВТ для самостоятельной работы, так и преподавателями для проведения семинаров, контрольных работ и проверки теоретических знаний и навыков студентов.

Пособие разработано в рамках инновационной образовательной программы МФТИ «Разработка методического обеспечения учебного процесса направления „Наукоемкие технологии и экономика инноваций“ подготовки бакалавров и магистров и его апробация на ФИВТ».

УДК 510.22

Общие сведения о курсе

Название: «Математическая логика-2: теория множеств и аппарат родов структур». Кафедра концептуального анализа и проектирования. Автор методических указаний: Пономарёв Иван Николаевич. Курс является обязательным, читается в 4-м семестре. По итогам курса выставляется дифференцированный зачет. Количество часов: 48.

Аннотация

В курсе изучаются аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля и её основные результаты. Также вводится аппарат родов структур и рассматриваются примеры его применения для описания математических объектов.

1. Основные цели курса

Студенты должны получить фундаментальное представление об аксиоматической теории множеств как о формальной основе, с помощью которой могут быть определены и изучены практически любые объекты математического исследования. Также студенты должны овладеть аппаратом родов структур как универсальным методом описания математических и прикладных объектов исследования средствами теории множеств. Курс даёт необходимые и достаточные знания для начала изучения способов применения родов структур в математическом моделировании.

2. Место курса в системе профессиональной подготовки студента

Курс является продолжением серии курсов по математической логике. На начало изучения у студентов предполагается наличие следующих знаний: чистое исчисление предикатов и формальный вывод в этом исчислении, понятия аксиоматической теории, непротиворечивости и полноты. Подготавливается база для более глубокого изучения аспектов аппарата родов структур в курсе «Декомпозиция в математическом моделировании» и курсе «Методы концептуального анализа и проектирования» кафедры концептуального анализа и проектирования.

3. Методы проведения занятий

Лекции (32 часа) и семинары (16 часов).

4. Формы контроля

Текущий контроль: промежуточная контрольная работа, включающая решение задач и ответы на теоретические вопросы, проверка результатов выполнения домашнего задания.

Итоговый контроль: итоговая контрольная работа, включающая решение задач и ответы на теоретические вопросы.

Итоговая оценка определяется результатом итоговой контрольной работы. К сдаче итоговой контрольной работы допускаются студенты, сдавшие домашнее задание и справившиеся с заданиями промежуточной контрольной работы.

Программа курса

1. Язык и аксиоматика теории множеств

1.1 Интуитивное представление о множествах. «Наивная» аксиоматизация теории множеств посредством аксиомы экстенсиональности и схемы аксиом неограниченного выделения, противоречивость «наивной» аксиоматизации. Парадокс Рассела.

1.2 Система аксиом Цермело-Френкеля с аксиомой выбора. Основные операции над множествами и их свойства. Упорядоченная пара по Куратовскому, декартово произведение и проекции множеств, их свойства.

1.3 Натуральные числа по фон Нейману, индукция и рекурсия по множеству натуральных чисел, арифметика натуральных чисел. Множества рациональных и действительных чисел.

2. Мощности множеств

2.1 Бинарные отношения функции, инъекции, сюръекции, биекции и их свойства. Сравнение множеств по мощности.

2.2 Операции над мощностями, их свойства. Теоремы Кантора–Шрёдера–Бернштейна, Кантора, Кёнига о свойствах мощностей множеств. Парадокс Кантора.

3. Упорядоченные множества

3.1 Бинарные отношения эквивалентности, порядка и их свойства. Изоморфные и не изоморфные упорядоченные множества.

3.2 Вполне упорядоченные множества. Трансфинитная индукция и рекурсия. Теорема Цермело о вполне упорядочении. Сравнимость по мощности любых множеств в системах с аксиомой выбора. Ординалы. Парадокс Бурали–Форти. Кардиналы.

4. Рода структур

4.1 Ступени и шкалы ступеней. Канонические распространения отображений. Переносимость соотношений и термов. Критерии биективной переносимости. Определение и примеры родов структур Бурбаки.
4.2 Эквивалентные и выводимые рода структур. Порождение множества структур данного рода и синтез родов структур.

Краткое содержание тем (лекций)

Лекция 1. Формальные основы теории множеств

Учебная задача

Определить язык первого порядка для теории множеств и ввести некоторые простейшие понятия. Показать несостоятельность попытки «наивной» аксиоматизации теории множеств. Изложить аксиоматику Цермело–Френкеля и рассмотреть некоторые непосредственные следствия аксиом. Пункты программы: 1.1, 1.2.

Обзор темы

При необходимости в начале лекции напомнить студентам некоторые сведения из математической логики путём краткого обзора следующих вопросов: язык первого порядка, аксиомы и правила формального вывода, теория, модель, непротиворечивость.

Изложить «интуитивное представление» о множествах, процитировать «приблизительные определения» понятия «множество» из различных источников.

Дать определение сигнатуры со знаком $\in$, ввести понятие подмножества и равенства множеств. Показать транзитивность и рефлексивность равенства множеств. Сформулировать аксиому экстенсиональности и доказать следование из неё неразличимости равных множеств. Показать различные возможные способы ввода понятия «равенство множеств» и аксиомы экстенсиональности.

Определить схему аксиом неограниченного выделения. Доказать единственность множества, определяемого аксиомой неограниченного выделения. Продемонстрировать парадокс Рассела и, как следствие, противоречивость «наивной» аксиоматизации теории множеств с помощью аксиомы экстенсиональности и схемы аксиом неограниченного выделения. Дать сведения об истории возникновения и развития аксиоматической теории множеств Цермело–Френкеля. Дать предварительное представление о причинах научного спора по поводу аксиомы выбора, различении теорий ZF и ZFC.

Сформулировать аксиомы Цермело–Френкеля: экстенсиональности, множества частей, множества-суммы, схемы аксиом подстановки, бесконечности, выбора, фундирования (регулярности).

Доказать первые следствия из аксиом ZF: схему аксиом ограниченного выделения, существование и единственность пустого множества, существование и единственность неупорядоченной пары.

Доказать, что следствием аксиомы фундирования является несуществование множеств, элементы которых «закольцованы» отношением $\in$ или образуют бесконечно убывающую последовательность по $\in$.

В силу того, что первый блок насыщен теоретическим материалом, решение задач на семинаре не предусмотрено. Время семинара используется для изложения теоретического материала, не рассмотренного на лекции.

Основные знания и умения

Студент должен представлять себе синтаксическую основу теории множеств в виде языка первого порядка, снабжённого правилами вывода исчисления предикатов. Должна быть ясна сущность понятий «принадлежать», «быть подмножеством», «быть равными множествами». Должен быть ясен комплексный характер проблемы аксиоматизации теории множеств, понятна сущность парадокса Рассела. Студент должен быть способен сформулировать все аксиомы теории Цермело–Френкеля, кратко описать роль каждой из них и первые следствия из них.

Контрольные вопросы к данной теме

1) Приведите пример множеств a и b, для которых одновременно $a \in b$ и $a \subseteq b$.
2) Какими способами в теории множеств можно задать отношение равенства и аксиому экстенсиональности?
3) Докажите, что для любого n, если $a_1 \subseteq a_2 \subseteq \ldots \subseteq a_n \subseteq a_1$, то $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
4) Что такое схема аксиом неограниченного выделения и почему она неприемлема для аксиоматизации теории множеств? В чём заключается *парадокс Рассела?*

5) Сформулируйте аксиомы системы Цермело–Френкеля и кратко опишите основную роль каждой из них.
6) Докажите, что в ZF не существует $\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ такого, что $a_1 \in \in a_2 \in \ldots \in a_n \in a_1$.
7) Объясните разницу между утверждениями *множество (x таких, что A) пусто* и *множество (x таких, что A) не существует*. Приведите примеры соответствующих условий A.

Список литературы

Аксиома экстенсиональности [10 гл. II § 2]; противоречивость наивной теории множеств [3 ч. 2 гл. 1 § 1]; аксиомы Цермело–Френкеля [3 ч. 2 гл. 1 § 6]; язык теории Цермело–Френкеля [3 ч. 2 гл. 1 § 2], аксиома фундирования [10 гл. II § 5].

Лекция 2. Операции над множествами и их свойства

Учебная задача

Дать представление об основных операциях над множествами и их свойствах. Пункты программы: 1.2.

Обзор темы

Обосновать использование термов вида $\{x \mid A\}$ возможностью перехода от формул с их использованием к формулам языка первого порядка. Доказать, что $z \in \{x \mid A\} \Leftrightarrow (z|x)A$.

Последовательно дать определения и представить доказательства существования и основных свойств следующих множеств:

а) пустое множество $\varnothing$, свойства: $\varnothing \subseteq x$ (пустое множество является подмножеством любого множества), $x \subseteq \varnothing \Leftrightarrow x = \varnothing$;

б) множество-степень $P(x)$, свойства: $\varnothing \in P(x)$, $x \in P(x)$;

в) множество-сумма $\cup x$, свойства: $x = \cup P(x)$, $x \subseteq P(\cup x)$;

г) множество, определяемое по схеме аксиом подстановки $\{y \mid \exists x (x \in v \mathbin{\&} A \mathbin{\&} \exists! y\, A)\}$;

д) множество, определяемое по схеме аксиом ограниченного выделения $\{y \in v \mid A\}$;

е) множество-пересечение $\cap x$;

ж) одноэлементное множество (синглетон) $\{x\}$, свойства:

$x \in \{x\}$,
$x \neq \{x\}$,
$u \in \{x\} \Leftrightarrow u = x$,
$x = y \Leftrightarrow \{x\} = \{y\}$,
$\cup \{x\} = x$;

з) неупорядоченная пара $\{x, y\}$, свойства:

$\{x, y\} = \{y, x\}$,

$x \in \{x, y\}$,

$\{x, y\} = \{u, v\} \Leftrightarrow (x = u \,\&\, y = v) \vee (x = v \,\&\, y = u)$,

$\{x, y\} = \{u\} \Leftrightarrow x = u \,\&\, y = u$,

$\{x, x\} = \{x\}$;

и) объединение, пересечение, дополнение и симметрическая разность пары множеств, а также множества, которые могут быть построены при помощи суперпозиции данных операций (доказать, что операции симметрической разности и пересечения образуют базис, обсудить использование диаграмм Эйлера–Венна–Эдвардса для доказательства простых свойств операций над множествами), свойства:

$x \cap x = x$, $x \cup x = x$, $x \backslash x = \varnothing$,

$x \cap \mathrm{y} = \mathrm{y} \cap x$, $x \cup \mathrm{y} = \mathrm{y} \cup x$ (коммутативность),

$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$,

$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ (ассоциативность),

$x \cap (\mathrm{y} \cup \mathrm{z}) = (x \cap \mathrm{y}) \cup (x \cap \mathrm{z})$,

$x \cup (\mathrm{y} \cap \mathrm{z}) = (x \cup \mathrm{y}) \cap (x \cup \mathrm{z})$,

$(x \cup y) \backslash z = (x \backslash z) \cup (y \backslash z)$ (дистрибутивность),

$z \backslash (x \cap y) = (z \backslash x) \cup (z \backslash y)$,

$z \backslash (x \cup y) = (z \backslash x) \cap (z \backslash y)$,

$z \backslash (y \backslash x) = (x \cap z) \cup (z \backslash y)$,

$(y \backslash x) \cap z = (y \cap z) \backslash x = y \cap (z \backslash x)$,

$(y \backslash x) \cup z = (y \cup z) \backslash (x \backslash z)$,

$x \cap \varnothing = \varnothing$, $x \cup \varnothing = x$,

$\varnothing \backslash x = \varnothing$, $x \backslash \varnothing = x$;

к) упорядоченная пара по Куратовскому $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, основное свойство: $(x, y) = (u, v)$ тогда и только тогда, когда $x = u \,\&\, \&\, y = v$;

л) декартово произведение $x \times y$, свойства дистрибутивности относительно операций объединения, пересечения, дополнения, симметрической разности, $(x \subseteq y \,\&\, u \subseteq v) \Leftrightarrow (x \times y \subseteq u \times v)$;

м) малые и большие проекции множеств, основные свойства:

$\mathrm{pr}_1((u, v)) = u$, $\mathrm{pr}_2((u, v)) = v$,

$\mathrm{Pr}_1(x \times y) = x$, $\mathrm{Pr}_2(x \times y) = y$,

$r \subseteq x \times y \Rightarrow \mathrm{Pr}_1(r) \subseteq x$,

$r \subseteq x \times y \Rightarrow \mathrm{Pr}_2(r) \subseteq y$.

Семинар посвятить решению задач из §1 ч. I задачника [4], часть из которых включается в домашнее задание.

Основные знания и умения

Студент должен усвоить определения всех основных операций над множествами и уметь строго формально доказывать их свойства. Также студент должен уметь решать простые задачи, связанные с операциями над множествами.

Контрольные вопросы к данной теме[1]

1) Докажите, что для доказательства утверждения $\{x \mid A\}=\{x \mid B\}$ достаточно установить эквивалентность формул A и B.
2) Какие из множеств $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $P(\varnothing)$, $\cup\varnothing$, $\cap\varnothing$ равны, а какие — не равны между собой?
3) Может ли в ZF существовать такое x, что $\{x\}\in x$?
4) Существуют ли множества a, b, c такие, что $a\cap b\neq\varnothing$, $a\cap c=\varnothing$ и $(a\cap b)\backslash c=\varnothing$?
5) Докажите, что $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$ (основное свойство упорядоченной пары по Куратовскому). Докажите, что таким же свойством обладает конструкция $\{\{\varnothing, \{x\}\}, \{\{y\}\}\}$ (упорядоченная пара по Винеру).
6) Какое наибольшее число неравных между собой множеств может быть построено из n множеств с помощью операций объединения, пересечения и симметрической разности?
7) Докажите, что если некоторое равенство, содержащее переменные для множеств и операции объединения, пересечения, дополнения и симметрической разности неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором каждое множество либо пусто, либо содержит один элемент.

А также задачи из §1 и задачи 1–7 §2 ч. I задачника [4].

Список литературы

[3 ч. 2 гл. 1 § 1, § 2], [8 гл. 2 § 4–8], [2 1.1], [9 гл. 1].

Лекция 3. Числовые множества

Учебная задача

Показать, как в рамках теории ZF могут быть построены числовые множества. Определить формально множество натуральных чисел по фон Нейману, доказать его основные свойства, ввести и обосновать

---

1 Существенная часть контрольных вопросов к лекциям 2–6 взята из книги [2].

математическую индукцию и рекурсию. Ввести множества целых, рациональных и действительных чисел. Пункты программы: 1.3.

Обзор темы

Ввести понятие прогрессивного множества. С помощью аксиомы бесконечности доказать существование и единственность множества ω натуральных чисел по фон Нейману. Доказать, что множество ω удовлетворяет аксиомам Пеано, в том числе схеме аксиом счётной индукции. Доказать теорему о счётной рекурсии. Привести пример использования счётной рекурсии: операция *звёздочка Клини* для множеств. Упомянуть о том, что натуральные числа и теоремы о счётной индукции и рекурсии допускают обобщение в виде трансфинитных чисел и теорем о трансфинитной индукции и рекурсии, которые будут рассмотрены на лекции № 6. Ввести с помощью счётной рекурсии арифметические операции над натуральными числами.

Определить множество целых чисел как пару *знак, натуральное число*. Ввести арифметические операции на целых числах. Определить множество рациональных чисел как множество троек *знак, числитель, знаменатель*. Определить арифметические операции на рациональных числах. Определить множество действительных чисел как множество дедекиндовых сечений множества рациональных чисел. Определить арифметические операции на множестве действительных чисел.

На семинаре завершить разбор задач из §1 и задач 1–7 §2 ч. I задачника [4].

Основные знания и умения

Студенты должны знать, каким образом в ZF могут быть построены множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел вместе с арифметическими операциями над ними. Студент должен знать, каким образом в ZF обосновываются счётная индукция и рекурсия и уметь их применять.

Контрольные вопросы к данной теме

1) Сформулируйте определение множества натуральных чисел по фон Нейману. Откуда следует его существование и единственность?
2) Сформулируйте теоремы о счётной рекурсии и индукции.
3) Доказать, что для натуральных чисел n и m, если $n < m$, то $n \subset m$ и $\max(n, m) = n \cup m$, $\min(n, m) = n \cap m$.
4) Пусть $u \subseteq \omega$, доказать, что $\cap u$ — наименьший элемент этого множества.

5) Пусть $u \subseteq \omega$, доказать, что $\cup u$ — либо наибольший элемент этого множества, либо само ω.

Список литературы

[3 ч. 2 гл. 1 § 4], [8 гл. III § 1, § 2], действительные числа [6 § 6].

Лекция 4. Отображения и сравнение множеств по мощности

Учебная задача

Рассмотреть основные разновидности бинарных отношений на двух множествах и их свойства, рассмотреть вопросы, связанные со сравнением множеств по мощности. Пункты программы: 2.1, 2.2.

Обзор темы

Дать определения: а) бинарного отношения; б) свойств всюдуопределённости, всюдузначности, прямой однозначности, обратной однозначности бинарного отношения; в) функции, инъекции, сюръекции, биекции; г) значения функции и образа множества; д) отображения, обратного исходному; е) суперпозиции отображений.

Рассмотреть основные свойства этих объектов: а) если f — функция, то $f[x \cup y] = f[x] \cup f[y]$, $f[x \cap y] \subseteq f[x] \cap f[y]$, $f[x] \setminus f[y] \subseteq f[x \setminus y]$, если f биективна, то в последних двух соотношениях можно знаки $\subseteq$ заменить знаками равенства, б) если f и g одновременно являются биекциями (сюръекциями, инъекциями), то $g \circ f$ также является биекцией (сюръекцией, инъекцией); в) если g — биекция, а f — сюръекция (инъекция), то $g \circ f$ — сюръекция (инъекция).

Доказать теорему Кантора–Шрёдера–Бернштейна о существовании биекции между множествами a и b в случае, когда имеются инъекции из a в b и из b в a.

Определить сравнение множеств по мощности через существование или несуществование соответствующих инъекций. Рассмотреть основные свойства сравнений множеств по мощности. Доказать теорему Кантора (множество всех подмножеств любого множества имеет мощность, превосходящую мощность исходного множества). Рассмотреть парадокс Кантора, показывающий, что не может существовать множества всех множеств. Дать определение понятиям *конечное множество* и *бесконечное множество* через сравнение по мощности с множеством ω. С помощью счётной рекурсии и аксиомы выбора доказать, что в ZFC любое множество сравнимо по мощности с ω. Доказать критерий Дедекинда бесконечности множества.

Ввести арифметические операции над мощностями (сложение, умножение, возведение в степень) и доказать их основные свойства.

Доказать, что множество-степень не бесконечного множества не бесконечна. Доказать, что если x и y не бесконечные множества, то их сумма, декартово произведение, степень не бесконечны.

Доказать некоторые свойства мощностей счётных множеств ($|x| + \aleph_0 = \max(|x|, \aleph_0)$, если $|x| \le \aleph_0$, то $|x|\ \aleph_0 = \aleph_0$).

Доказать счётность множеств целых и рациональных чисел. Доказать, что мощность действительных чисел равна мощности множества всех подмножеств натуральных чисел. Доказать, что мощность n-й степени континуума равна мощности континуума. Доказать зависящую от аксиомы выбора теорему Кёнига.

При наличии времени обсудить парадокс Сколема.

Семинар посвятить решению задач из § 2 и § 4 ч. I задачника [4].

Основные знания и умения

Студент должен знать определения основных разновидностей бинарных отношений на двух множествах и связанных понятий. Уметь решать задачи на свойства бинарных отношений на двух множествах. Уметь доказывать равенство и неравенство мощностей множеств.

Контрольные вопросы к данной теме

1) Следует ли (в системе ZF без аксиомы выбора) из отрицания $|\, a \,| < |\, b \,|$ утверждение $|\, a \,| \ge |\, b \,|$? Следует ли из утверждения $|\, a \,| \ge |\, b \,|$ отрицание $|\, a \,| < |\, b \,|$?
2) Чему равно $\varnothing^x$, $x^\varnothing$, $\varnothing^\varnothing$?
3) В чём заключается парадокс Кантора наивной теории множеств?
4) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счётно.
5) Докажите, что множество точек строгого локального максимума любой функции действительного аргумента конечно или счётно.
6) Докажите, что множество точек разрыва неубывающей функции действительного аргумента конечно или счётно.
7) Докажите, что множество всех алгебраических чисел счётно (число называется алгебраическим, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами).
8) Докажите, что все пространственные фигуры, содержащие отрезок кривой, равномощны.
9) Докажите, что множество всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек на плоскости.

10) Докажите, что а) множество всех непрерывных б) множество всех монотонных функций действительного переменного имеет мощность континуума.
11) Докажите, что если а) квадрат б) отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них имеет мощность континуума.

А также задачи из § 2 и § 4 ч. I задачника [4].

Список литературы

[3 ч. 2 гл. 1 § 3], [2 1.3—1.8], [9 гл. 2].

Лекция 5. Упорядоченные множества (начало)

Учебная задача

Рассмотреть основные разновидности бинарных отношений на одном множестве и их свойства. Рассмотреть вопросы, связанные с изоморфизмами упорядоченных множеств. Пункты программы: 3.1, 3.2.

Обзор темы

Определить бинарное отношение на одном множестве, его стандартные свойства: транзитивность, симметричность, антисимметричность, рефлексивность, антирефлексивность, линейность. Определить отношение эквивалентности. Доказать теорему о классах эквивалентности.

Дать определение отношений частичного/линейного строгого/нестрогого порядка и привести примеры: а) всякое множество x можно частично упорядочить отношением id_x: отношение тождества представляет собой частичный порядок, в котором любые два неравных элемента несравнимы; б) числовые множества линейно упорядочены обычным отношением $<$; в) на множестве функций с действительными аргументами и значениями, определённых на подмножестве v действительных чисел, можно ввести частичный порядок условием «f $\leq$ g если и только если $\forall\, x\ (x \in v \Rightarrow f(x) \leq g(x))$»; г) на множестве натуральных чисел можно ввести частичный порядок по условию «$a \leq b$ если и только если b делится без остатка на a»; д) множество $P(x)$ всех подмножеств некоторого данного множества может быть частично упорядочено по условию «$a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a \subseteq b$»; 6) если на множестве x определён порядок r и $s \subseteq x$, то множество $s{\times}s \cap r$ будет задавать *индуцированный* порядок на s; е) если на не пересекающихся множествах x и y определены частичные порядки r_1 и r_2, то на множестве $x \cup y$ частичный порядок может быть введён либо как $r_1 \cup \cup r_2$ (такой порядок, если x и y не пустые, будет необходимо частичным), либо как $r_1 \cup r_2 \cup x \times y$ (если r_1 и r_2 — линейные порядки, то такой порядок также будет линейным и называется *суммой* упорядоченных множеств); ж) на декартовом произведении частично упорядоченных множеств порядок можно ввести покоординатный (такой порядок, если x и y не пустые, будет необходимо частичным) или с выделением главной координаты (если на x y введены линейные порядки, то такой порядок будет линейным и называется *произведением* упорядоченных множеств) з) на множестве строк в алфавите можно ввести линейный лексикографический порядок или же задать линейный порядок, интерпретируя строки как натуральные числа в p-ичной системе счисления.

Дать определения максимального/минимального, наибольшего/наименьшего элементов, верхней/нижней грани, инфимума/супремума. Рассмотреть примеры: а) в полуинтервале [0, 1) с обычным порядком минимальный, он же наименьший, элемент — 0, максимального элемента не существует; б) в множестве натуральных чисел, больших единицы, упорядоченных отношением делимости, имеется счётно-бесконечное множество минимальных элементов (простые числа) и нет наименьшего и максимальных элементов; в) в множестве $P(x)$, частично упорядоченном по включению, не всякая пара элементов сравнима, тем не менее, $\varnothing$ — наименьший, а x — наибольший элемент этого множества; г) пусть конечное множество x состоит из n элементов, тогда в множестве $P(x) \setminus x \setminus \varnothing$, частично упорядоченном по включению, имеется n минимальных элементов (все элементы $\{t\}$, $t \in x$) и столько же максимальных (все элементы $x \setminus \{t\}$, где $t \in x$); д) наименьшей верхней гранью (supremum) полуинтервала [0, 1) является 1; е) рассмотрим множество конечных подмножеств натуральных чисел, к элементам которого добавлено также множество целых чисел и множество положительных действительных чисел. Упорядочим это множество по включению. В этом множестве как множество целых, так и множество положительных действительных чисел являются минимальными верхними гранями множества конечных подмножеств натуральных чисел, но ни одно из них не является наименьшей верхней гранью, т. к. эти два множества не сравнимы по включению.

Определить понятие изоморфизма упорядоченных множеств. Доказать, что множества натуральных, целых и рациональных чисел с обычными порядками неизоморфны. Показать, что конечные линейно упорядоченные множества одинаковой мощности изоморфны, счётные плотные линейно упорядоченные множества без максимального и минимального элементов изоморфны.

Дать определение фундированного и вполне упорядоченного множества, рассмотреть примеры: а) множество натуральных чисел вполне упорядочено; б) множество натуральных чисел, упорядоченное отношением делимости, является фундированным, но не вполне упорядоченным (т. к. оно не упорядочено линейно); в) множество целых чисел, упорядоченное обычным отношением $<$ не является фундированным, также и множество неотрицательных действительных чисел, упорядоченное обычным отношением $<$, не является фундированным; г) множество действительных чисел, полученное объединением возрастающей сходящейся к 1 последовательности и числа 1, является вполне упорядоченным.

Семинар посвятить завершению разбора задач из § 4 ч. I задачника [4] (сравнение множеств по мощности). Разобрать задачи из § 3 ч. I на свойства отношений эквивалентности и порядка.

Основные знания и умения

Студент должен знать определения основных разновидностей бинарных отношений на одном множестве. Уметь решать задачи на свойства бинарных отношений на одном множестве. Уметь доказывать наличие или отсутствие изоморфизма между различными упорядоченными множествами.

Контрольные вопросы к данной теме

1) Пусть r_1 и r_2 задают отношения эквивалентности на некотором множестве. Будет ли а) их пересечение б) их объединение отношением эквивалентности?
2) Докажите следующие утверждения относительно частично упорядоченных множеств: а) всякий наименьший элемент является минимальным, а наибольший — максимальным; б) если в множестве существует наименьший элемент, то он единственен, то же справедливо для наибольшего элемента; в) не исключается случай, когда множество имеет несколько минимальных и/или несколько максимальных элементов; г) если в множестве имеется несколько минимальных элементов, то в нём не существует наименьшего элемента, если несколько максимальных — не существует наибольшего; д) любые два минимальных элемента несравнимы, и то же справедливо для двух максимальных элементов; е) если порядок на множестве линеен, то его минимальный элемент, если существует, является наименьшим, а максимальный, если существует — наибольшим.

3) Докажите, что множество всех целых положительных делителей числа 30 с отношением «быть делителем» в качестве отношения порядка изоморфно множеству всех подмножеств множества $\{a, b, c\}$, упорядоченному по включению.
4) Докажите, что множества (0; 1) и (0; π) изоморфны. Докажите, что множества рациональных точек этих множеств изоморфны.
5) Докажите, что множество двоично-рациональных чисел интервала (0; 1) изоморфно множеству рациональных чисел (число называется двоично-рациональным, если имеет вид $m/2^n$, где m — целое число, n — натуральное).
6) Докажите, что следующие три определения фундированного множества эквивалентны: а) всякое непустое подмножество исходного множества имеет минимальный элемент, б) не существует бесконечной строго убывающей последовательности элементов множества, в) для множества верен принцип индукции (если для любого x из истинности $A(y)$ для всех $y < x$ следует истинность $A(x)$, то свойство $A(x)$ истинно при всех x).

А также задачи из § 3 ч. I задачника [4] на свойства отношений эквивалентности и порядка.

Список литературы

[2 2.1—2.3], [8 гл. VI], [9 гл 3].

Лекция 6. Упорядоченные множества (окончание)

Учебная задача

Определить класс ординалов, рассмотреть свойства ординалов, доказать теоремы о трансфинитной индукции и рекурсии, продемонстрировать основные применения трансфинитной индукции в теории множеств. Пункты программы: 3.2.

Обзор темы

Дать определение транзитивного множества и ординала. Рассмотреть простейшие свойства ординалов. Доказать, что сумма множества ординалов есть ординал. Рассмотреть некоторые примеры ординалов. Доказать теорему о трансфинитной индукции. Доказать с помощью трансфинитной индукции сравнимость любых двух ординалов. Доказать несуществование множества всех ординалов (парадокс Бурали–Форти). Определить предельные и последующие ординалы, доказать, что любой последующий ординал представим в виде суммы предельного ординала и натурального числа. Доказать теорему о трансфинитной рекурсии.

С помощью трансфинитной рекурсии доказать, что

а) любое вполне упорядоченное множество изоморфно единственному ординалу;

б) в ZFC любое множество может быть вполне упорядочено (теорема Цермело);

в) следствие теоремы Цермело: в ZFC любые два множества сравнимы по мощности;

г) лемму Цорна: если в частично упорядоченном множестве каждая цепь имеет верхнюю грань, то в множестве имеется максимальный элемент.

С помощью леммы Цорна доказать теорему о квадрате (если x бесконечно, то $|x \times x| = |x|$). Показать, что теорема Цермело, лемма Цорна, теорема о квадрате и аксиома выбора эквивалентны в ZF. Доказать для бесконечных множеств формулы $|a| + |b| = |a||b| = \max(|a|, |b|)$. Дать определение кардинала.

Сделать обзор по континуум-гипотезе.

Основные знания и умения

Студент должен знать определение класса ординалов и основные свойства ординалов. Знать теоремы о трансфинитной индукции и рекурсии и то, каким образом они могут быть применены для доказательства теоремы Цермело и леммы Цорна. Знать определение класса кардиналов и уметь решать простые задачи на арифметику кардинальных чисел.

Контрольные вопросы к данной теме

1) Назовите известные вам теоремы, эквивалентные в ZF аксиоме выбора.
2) В чём заключается парадокс Бурали–Форти наивной теории множеств?
3) Пусть x — бесконечно. Докажите, что $|x^*| = |x|$ (здесь $x^* = \{\varnothing\} \cup x \cup x \times x \cup x \times x \times x \cup \ldots$ — *звёздочка Клини*).
4) Пусть множество y бесконечно. Докажите, что

$$|x|^{|y|} = 2^{|y|}, \text{ если } 2 \le |x| \le 2^{|y|};$$

$$|x| \le |x|^{|y|} < 2^{|x|}, \text{ если } |x| > 2^{|y|}.$$

А также задачи § 3, 4, 5 ч. I задачника [4].

Список литературы

[2 2.4—2.13], [8 гл. VII], [9 гл. 4].

Лекция 7. Прием домашнего задания. Промежуточная контрольная работа

На этом занятии завершается блок, посвящённый аксиоматической теории множеств. При необходимости, начало занятия посвятить вопросам, требующим дополнительного разъяснения. В качестве контрольной работы студенты получают задания из части I задачника [4], аналогичные тем, что решались на семинарах и в домашней работе.

Лекция 8. Типизации и биективная переносимость. Определение рода структуры

Учебная задача

Ввести все вспомогательные конструкции, требуемые для определения понятия *род структуры*. Построить формальный язык родов структур. Дать определение понятию *род структуры* и продемонстрировать возможности описания в родах структур различных математических объектов. Пункты программы: 4.1.

Обзор темы

Дать определение схемы конструкции ступени, ступени, типизированного множества, М-графа. Дать определение понятиям «каноническое распространение отображений относительно типизации» и «перенос типизированного множества». Дать определение биективной переносимости термов и соотношений. Привести примеры переносимых и непереносимых термов и соотношений.

Ввести операции над схемами конструкции ступеней. Рассмотреть достаточные условия биективной переносимости:

а) $\varnothing$ есть биективно переносимый терм типа $P(S'[x_1, ...])$, какова бы ни была схема S';

б) базисные множества $x_1... x_n$ есть биективно переносимые термы, $\tau(x_i) = P(x_i)$;

в) вспомогательные множества $\theta_1...\theta_n$ есть биективно переносимые термы, $\tau(\theta_i) = P(\theta_i)$;

г) родовая константа d, для которой вводится соотношение типизации $d \in S[x_1,...]$, есть биективно переносимый терм, $\tau(d) = S[x_1,...]$;

д) ступень $S'[x_1,...]$ есть биективно переносимый терм, $\tau\ S'[x_1,...] = P(S'[x_1,...])$;

е) если ξ — биективно переносимый терм, причём в теории множеств выводимо, что ξ — одноэлементное множество, то $\cup\xi$ (равный единственному элементу множества ξ) есть биективно переносимый терм и $\tau(\cup\xi) = D\tau(\xi)$;

ж) если R, возможно, зависящее от t, биективно переносимо в случае, когда $\tau(t) = S_t[x_1,...]$, то $\{t \in S_t[x_1,...] \mid R\}$ — биективно переносимый терм, $\tau(\{t \in S_t[x_1,...] \mid R\}) = P\,(S_t[x_1,...])$.

з) если ξ — биективно переносимый терм, то $\mathrm{pr}_1(\xi)$ и $\mathrm{pr}_2(\xi)$ — биективно переносимые термы, $\tau(\mathrm{pr}_1(\xi)) = P_1\tau(\xi)$, $\tau(\mathrm{pr}_2(\xi)) = P_2\tau(\xi)$;

и) если ξ и η — биективно переносимые термы и $P(\tau(\xi)) = \tau(\eta)$, то $\xi \in \eta$ — биективно переносимое соотношение;

к) если ξ и η — биективно переносимые термы и $\tau(\xi) = \tau(\eta)$, то $\xi = \eta$ — биективно переносимое соотношение;

л) если R и R' — биективно переносимые соотношения, то $\neg R$, $R \vee R'$, $R \& R'$, $R \Rightarrow R'$, $R \Leftrightarrow R'$ — биективно переносимые соотношения;

м) если R, возможно, зависящее от t, биективно переносимо в случае, когда $\tau(t) = S_t[x_1,...]$, то $\forall t \in S_t[x_1,...]R$ и $\exists t \in S_t[x_1,...]R$ — биективно переносимые соотношения.

Свести условия биективной переносимости к синтаксическим и семантическим правилам формального языка родов структур.

Дать определение рода структуры. Дать определение сигма-объекта. Дать определение теоремы рода структуры, непротиворечивости рода структуры и доказать, что род структуры непротиворечив в том и только том случае, когда класс его сигма-объектов не пуст.

Дать определение изоморфизма сигма-объекта.

Следующие примеры родов структур могут быть рассмотрены в качестве иллюстрации: функции, биекции, инъекции, сюръекции; эквивалентности; частичного строгого/нестрогого порядка, линейного строгого/нестрогого порядка; вполне упорядоченного множества; решётки; тернарных полугруппы, моноида, группы, абелевой группы; полукольца, кольца, тела, поля; алгебраической решётки, булевой алгебры; топологического пространства; линейного пространства.

Основные знания и умения

Студент должен быть знаком с понятием биективной переносимости, должен уметь формулировать биективно переносимые соотношения и термы, определять типизацию биективно переносимых термов. Студент должен быть знаком с определением понятия «род структуры» и уметь описывать в родах структур различные математические объекты.

Контрольные вопросы к данной теме

1) Сформулируйте понятия биективно переносимого соотношения и биективно переносимого терма.
2) Перечислите известные вам достаточные условия биективной переносимости.
3) Сформулируйте синтаксические и семантические правила языка родов структур.
4) Пусть дан род структуры

   $d \in P(x_1 \times x_2)$;

   R_1:$\forall v \in x_2, \exists u \in x_1 \times x_2\ (u \in d\ \&\ \mathrm{pr}_2(u) = v)$;

   R_2:$\forall t_1 \in x_1 \times x_2, \forall t_2 \in x_1 \times x_2\ (t_1 \in d\ \&\ t_2 \in d\ \&\ \mathrm{pr}_1(t_1) = \mathrm{pr}_1(t_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow t_1 = t_2)$;

   $T_1 = \{t \in x_1 \mid \exists u \in x_1 \times x_2(u \in d\ \&\ \mathrm{pr}_1(u) = t)\}$;

   $T_2 = \{t \in P(x_1) \mid \exists u \in x_2\ t = \{a \in x_1 \mid \exists v \in x_1 \times x_2(v \in d\ \&\ \mathrm{pr}_1(v) =$ $= a\ \&\ \mathrm{pr}_2(v) = u)\}\}$.
5) Выделите подтермы в выражениях конституэнт этого рода структуры и укажите их типизацию.
6) Пусть дан род структуры

   $d \in PP(x_1)$;

   R_1: $\forall a \in P(x_1), \forall b \in P(x_1)(a \in d\ \&\ b \in d \Rightarrow \{t \in x_1 \mid t \in a\ \&\ t \in$ $\in b\} \in d)$;

   R_2: $\forall a \in P(x_1), \forall b \in P(x_1)(\forall t \in x_1(t \in a \Rightarrow t \in b) \Rightarrow b \in d)$;

   $T_1 = \{t \in x_1 \mid \exists v \in P(x_1)(v \in d\ \&\ t \in v)\}$;

   $T_2 = \{t \in x_1 \times x_1 \mid \exists v \in P(x_1)(v \in d\ \&\ \mathrm{pr}_1(t) \in v\ \&\ \mathrm{pr}_2(t) \in v)\}$.
7) Выделите подтермы в выражениях конституэнт этого рода структуры и укажите их типизацию.
8) Как должны быть типизированы множества x и y для того, чтобы множество x^y было биективно переносимо? Какую типизацию при этом будет иметь множество x^y?
9) Покажите, что множество автоморфизмов сигма-объекта удовлетворяет аксиомам группы относительно операции композиции.

Список литературы

Шкалы и ступени [1 гл. 4 § 1]; типизации и биективная переносимость: [1 гл. 4 приложение], [5 2.2]; рода структур [1 гл. 4 § 1], [5 2.3].

Лекция 9. Выводимые и эквивалентные рода структур. Операции над родами структур

Учебная задача

Показать, как между структурами могут быть введены отношения выводимости и эквивалентности. Рассмотреть формальные операции над родами структур. Пункты программы: 4.2.

Обзор темы

Дать определение способа вывода одной структуры из другой. Ввести понятие «род структуры Θ богаче рода структуры Σ». Дать определение эквивалентных родов структур и рассмотреть примеры (род структуры отношения эквивалентности эквивалентен роду структуры разбиения, род структуры решётки на множествах эквивалентен роду структуры алгебраической решётки, два способа определения топологических пространств — через точки прикосновения и замыкания множеств — эквивалентны).

Дать определение операции порождения множества структур данного рода. Рассмотреть свойства класса сигма-объектов рода структуры, полученного с помощью операции порождения множества структур данного рода. Привести пример: получение рода структуры множества функций из рода структуры функции.

Дать определение синтеза родов структур, рассмотреть свойство класса сигма-объектов синтезированного рода структуры. Привести пример: синтез рода структуры функции с родом структуры разбиения. Доказать критерий непротиворечивости синтезированного рода структуры.

Основные знания и умения

Студент должен уметь сопоставлять рода структур по выводимости и эквивалентности, уметь применять операции порождения множества структур данного рода и синтеза родов структур.

Контрольные вопросы к данной теме

1) Пусть Σ_1 — род структуры группоида, Σ_2 — полугруппы, Σ_3 — моноида, Σ_4 — группы, Σ_5 — абелевой группы; Σ_6 — полукольца, Σ_7 — кольца, Σ_8 — тела, Σ_9 — поля и выражение $\Sigma<\Theta$ означает «род структуры Θ богаче рода структуры Σ». Покажите, что $\Sigma_1 < < \Sigma_2 < \Sigma_3 < \Sigma_4 < \Sigma_5$ и $\Sigma_6 < \Sigma_7 < \Sigma_8 < \Sigma_9$.
2) Постройте способ вывода рода структуры разбиения из рода структуры сюръекции x_1 на x_2.

3) Докажите, что род структуры разбиения множества эквивалентен роду структуры отношения эквивалентности.
4) Докажите, что род структуры частичного нестрогого порядка эквивалентен роду структуры частичного строгого порядка.
5) Пусть род структуры Θ получен из рода структуры Σ с помощью операции порождения множества структур данного рода. Докажите, что Θ-объекты, у которых родовая константа интерпретируется непустым множеством, существуют тогда и только тогда, когда Σ непротиворечив.
6) Пусть при синтезе родов структур базисное множество x_1 отождествляется с термом ψ. Проверьте, что при типовых характеристиках а) $d \in x_1$, б) $d \in x_1 \times x_2$, в) $d \in P(x_1 \times x_2)$, г) $d \in PP(x_1 \times x_1)$, д) $d \in PPP(x_1 \times x_2)$, е) $d \in P((x_1 \times x_2) \times x_1)$, ж) $d \in P(x_1) \times x_1 \times x_2$, аксиомы синтеза вместе с новым соотношением типизации будут эквивалентны, соответственно а) $d \in \psi$, б) $\mathrm{pr}_1(d) \in \psi$, в) $\mathrm{Pr}_1(d) \subseteq \subseteq \psi$, г) $\mathrm{Pr}_1(\cup d) \subseteq \psi \,\&\, \mathrm{Pr}_2(\cup d) \subseteq \psi$, д) $\mathrm{Pr}_1(\cup\cup d) \subseteq \psi$, е) $\mathrm{Pr}_1(\mathrm{Pr}_1(d)) \subseteq \subseteq \psi \,\&\, \mathrm{Pr}_2(d) \subseteq \psi$, ж) $\mathrm{pr}_1(d) \subseteq \psi \,\&\, \mathrm{pr}_2(d) \in \psi$.

Список литературы

[1 гл. 4 § 1], [5 2.4].

Лекция 10. Итоговая контрольная работа

Студенты получают по два теоретических вопроса из разных частей перечня вопросов к зачёту (см. п. 10) и задачу из числа тех, что решались на семинарах, в домашней или контрольной работе. По результатам решения задачи и ответа на теоретические вопросы выставляется дифференцированный зачёт.

Практические занятия

Пример домашнего задания (сдаётся к 7-му занятию). Номера задач указаны по книге Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Язык и аксиоматика теории множеств

Ч. I. § 1: 3; 4; 6; 8; 9; 11 (а, г, ж); 12 (в, д, ж, п, т); 13 (а, д, к); 14 (в, к); 15; 17; 18; 20. § 2: 1, 3, 6 (а, б, г).

Отношения и функции

Ч. I. § 2: 8 (а, в); 9 (а, в); 12 (б, г); 13; 14; 22; 25 (а-д); 31 (а); 32 (а); 34; 35; 38 (а, в, д).

Мощности множеств

Ч. I. § 4: 1; 5; 8; 10 (а); 13; 15; 16; 18; 19; 20; 23; 24; 30; 31; 36; 38; 39; 42.

Отношение эквивалентности

Ч. I. § 3: 6; 7; 8; 9; 11; 12; 17; 19; 20.

Упорядоченные множества и ординальные числа

Ч. I. § 3: 30; 39; 42; 49; 54; § 5: 13; 14; 38; 46; 47; 48; 50; 51; 66.

Примерный перечень вопросов к зачёту

1. Язык первого порядка теории множеств, отношения *принадлежать* и *быть подмножеством*. Аксиома экстенсиональности и отношение равенства.
2. Система аксиом Цермело–Френкеля и простейшие следствия из аксиом.
3. Понятие коллективизирующего соотношения. Термы вида $\{x \mid A\}$ и операции над множествами, которые могут быть построены на их основе.
4. Упорядоченная пара по Куратовскому, декартово произведение и проекции множеств.
5. Множество натуральных чисел по фон Нейману. Возможные способы построения множеств целых, рациональных и действительных чисел с арифметическими операциями.
6. Теоремы о счётной индукции и рекурсии. Примеры построения множеств с помощью счётной рекурсии.
7. Бинарные отношения на двух множествах, их разновидности и основные свойства. Прообразы, обратные отношения, композиции отношений.
8. Теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна.
9. Сравнение множеств по мощности. Арифметические операции над мощностями и их основные свойства.
10. Теорема Кантора. Парадокс Кантора наивной теории множеств.
11. Теорема Кёнига.
12. Конечные и бесконечные множества. Критерий Дедекинда бесконечности множества.

13. Бинарные отношения на одном множестве, их разновидности и основные свойства. Теорема о классах эквивалентности.
14. Минимальные/наименьшие, максимальные/наибольшие элементы и грани частично упорядоченных множеств.
15. Изоморфизмы порядков. Изоморфные и не изоморфные частично упорядоченные множества.
16. Ординалы: определение и основные свойства.
17. Теорема о трансфинитной индукции. Сравнимость любых двух ординалов по отношению $\in$.
18. Несуществование множества всех ординалов (парадокс Бурали–Форти).
19. Предельные и последующие ординалы. Представимость любого ординала в виде суммы предельного ординала и натурального числа.
20. Теорема о трансфинитной рекурсии.
21. Изоморфность любого вполне упорядоченного множества единственному ординалу.
22. Теорема Цермело о вполне упорядочении произвольного множества в теории ZF с аксиомой выбора. Её следствие о сравнимости любых двух множеств по мощности.
23. Лемма Цорна.
24. Теорема о квадрате. Соотношения $|a| + |b| = |a||b| = \max(|a|, |b|)$ для бесконечных множеств.
25. Схема конструкции ступени, ступень, шкала множеств, характер типизированных элементов.
26. Канонические распространения отображений при типизации, перенос, биективная переносимость термов и соотношений.
27. Условия биективной переносимости термов и соотношений. Формальный язык родов структур.
28. Биективно переносимые операции над множествами. Вычисление результирующей типизации.
29. Определение рода структуры, Σ-объекта, изоморфизма Σ-объектов.
30. Теоремы родов структур. Критерий непротиворечивости рода структуры.
31. Основные примеры построения родов структур.
32. Вывод и эквивалентность родов структур.
33. Операция порождения множества структур данного рода.
34. Операция синтеза родов структур.

Список литературы

Основная литература

1. *Бурбаки Н.* Теория множеств: Пер. с фр. / Под ред. В. А. Успенского. — М.: Мир, 1965. — 455 с.
2. *Верещагин Н. К., Шень А. Х.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 2002. — 128 с.
3. *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Математическая логика. — 2-е, стереотип. изд. — М.: УРСС, 2005. — 240 с.
4. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 256 с.
5. *Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании. — М.: ФАЗИС, 1998. — 266 с.

Дополнительная литература

6. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. — М.: Мир, 1973. — 150 с.
7. *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1969. — 347 с.
8. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. — М.: Мир, 1970. — 416 с.
9. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств / Под. ред. П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова — 3-е, стереотип. изд. — М.: УРСС, 2004. — 204 с.
10. *Френкель А. А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств / Под ред. А. С. Есенина–Вольпина. — М.: Мир, 1966. — 556 с.
11. *Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г.* Шкалы родов структур, термы и соотношения, сохраняющиеся при изоморфизмах. — М.: ВЦ РАН, 2003. — 92 с.

Методические указания по курсу

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА-2

Составитель *ПОНОМАРЁВ Иван Николаевич*

Редактор *В. А. Дружинина*. Корректор *О. П. Котова.*
Подписано в печать 29.05.2007. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ л. 1,6. Уч.- изд. л. 1,4. Тираж 70 экз.
Заказ № ф-.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Отдел автоматизированных издательских систем "ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ"
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9